Triangles rectangles et cercles

1. Médiane d’un triangle :

 Dans un triangle, une médiane est une droite qui passe par un sommet et par le milieu du côté opposé à ce sommet.



I est le milieu de [BC], donc la droite (AI) est la médiane issue de A dans le triangle ABC ; on dit aussi que (AI) est la médiane relative au côté [BC].

Remarque : Le segment [AI] est aussi appelé médiane.

1. Avec l’ordinateur  :

Trace un segment [AM]. Par le point M, trace la perpendiculaire à (AM). Sur cette dernière place un point B. Trace le triangle AMB qui est rectangle en M et marque son angle droit. Place le milieu O de [AB] et trace le cercle de diamètre [AB]. Que constates-tu ?

……………………………………………………………………………………………….

Modifie successivement la place de A et de B afin d’obtenir d’autres triangles.

Ta conjecture est-elle toujours vraie ?……………………………………………….

On démontre :



Trace le symétrique N de M par rapport à O. Complète la démonstration qui suit :

 - Puisque N est le symétrique de M par rapport à O alors O est le……………….. de [MN].

- Puisque les diagonales [AB] et [MN] ont le même …………………..alors le quadrilatère AMBN est un……………………………………………………..

- Puisque le …………………………….AMBN a un angle droit alors c’est un……………..

-AMBN est un rectangle donc AB ….MN et OM….OA….OB.

Conclusion : Le cercle de diamètre [AB] passe par le ……………………………………….

Propriété : Si un triangle est rectangle, alors le cercle ………………………. à ce triangle a pour diamètre son……………………………………………………………………

 Ou encore : Si un triangle est rectangle, alors le centre de son cercle ………………………. ….. est …………………………………de son……………..……………………



Ou encore : Si un triangle est rectangle, alors la longueur de la médiane relative à l’hypoténuse est égale ……………………………..de ………………………………………………………………………….

1. Avec l’ordinateur  :

Trace un segment [AB] et son milieu O. Trace le cercle *C* de diamètre [AB]. Sur ce cercle, place un point M distinct de A et de B. Trace les segments [AM] et [BM]. Mesure l’angle . Que constates-tu ? …………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………..

Modifie la place du point M sur le cercle. Ta remarque est-elle toujours valable ?……….

On démontre :

Sur la figure ci-contre, M est un point du cercle *C* de diamètre [AB] et O son centre.



N est le point de *C* diamétralement opposé à M.

1. Trace le quadrilatère AMBN. Quelle semble être la nature du quadrilatère AMBN ?…………………………………………………………………………..
2. Complète la démonstration suivante :

\* Puisque les diagonales [AB] et [MN] sont…………………………………………….

……………………………, alors elles ont le …………………………………………..

et la ……………………………………………………………………………………...

* Les diagonales [AB] et [MN] du quadrilatère AMBN ont le………………………

………………………………………………………………………………………….

 donc c’est un…………………………………………………………………………..

* Conclusion : Le triangle AMB est ………………………………………………..

Propriété :Si on joint un point d’un……………………aux deux……………………..

d’un…………………………., alors on obtient un triangle ……………………………

Cette propriété peut s’exprimer de plusieurs façons :

* Si un côté d’un triangle est un…………………….……de son cercle………..…………, alors ce triangle est …………………. et ce côté est son ………………. …………….

 

* Si dans un triangle, la longueur de la médiane relative à un côté est égale la moitié de

la longueur de ce côté, alors ce triangle est ………………………………..

**Exercices :**

**Exercice 1**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **Si** l’angle BMC est droit | **Alors** le point M appartient au cercle de diamètre [BC] |

Compléter les propriétés suivantes :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***a.*** | **Si** l’angle ABC est droit | **Alors** le point ..... appartient au cercle de diamètre [..........]  |
| ***b.*** | **Si** l’angle EMF est droit | **Alors** le point ..... appartient au cercle de diamètre [..........]  |
| ***c.*** | **Si** l’angle SAT est droit | **Alors** le point ..... appartient au cercle de diamètre [..........]  |
| ***d.*** | **Si** l’angle IJK est droit | **Alors** le point ..... appartient au cercle de diamètre [..........]  |
| ***e.*** | **Si** l’angle ABM est droit | **Alors** le point ..... appartient au cercle de diamètre [..........]  |

## Exercice 2

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **Si** un point M appartient au cercle de diamètre [BC] | **Alors** l’angle BMC est droit |

Compléter les propriétés suivantes :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***a.*** | **Si** un point A appartient au cercle de diamètre [IJ] | **Alors** l’angle ………. est droit |
| ***b.*** | **Si** un point C appartient au cercle de diamètre [AB] | **Alors** l’angle ………. est droit |
| ***c.*** | **Si** un point O appartient au cercle de diamètre [KL] | **Alors** l’angle ………. est droit |
| ***d.*** | **Si** un point E appartient au cercle de diamètre [DF] | **Alors** l’angle ………. est droit |
| ***e.*** | **Si** un point T appartient au cercle de diamètre [RS] | **Alors** l’angle ………. est droit |
|  |  |  |

# Exercice 3 Justifie les constructions.

1. Construis (sans utiliser l’équerre) un triangle IJK rectangle en J tel que: IK = 7 cm et IJ=3 cm .
2. Construis (sans utiliser l’équerre) un triangle LMN rectangle et isocèle en L tel que MN=8 cm.
3. Construis le centre du cercle ci-après

 

### Exercice 4

EFG est un triangle tel que EF = 10 cm, EG = 6 cm et FG = 8 cm. Montrer que le cercle de diamètre [EF] passe par le point G.

#  Exercice 5

 DEF est un triangle isocèle en D. E’ est le symétrique de E par rapport D.

 Démontrer que le triangle EFE’ est rectangle en F.

#### Exercice 6

 (C) est un cercle de centre O. A et M sont deux points de (C) non diamétralement opposés. La perpendiculaire en M à (AM) recoupe (C) en B.

 ***a.*** Faire une figure.

 ***b.*** Démontrer que O est le milieu de [AB].

N est un autre point du cercle (C).

 ***c.*** Démontrer que ANB est un triangle rectangle

# Exercice 7

Soit A, B, C et D quatre points distincts du plan. Sachant que les triangles ABC et ABD sont rectangles respectivement en C et D, montrer que les quatre points sont cocycliques ( situés sur un même cercle).

# Exercice 8

Soit *C et C ‘* deux cercles de centres respectifs O et O’, sécants (qui se coupent) en A et B.Les deux cercles n’ont pas forcément les mêmes rayons. La droite (AO) recoupe le cercle *C en* M et La droite (AO’) recoupe le cercle *C’* en N. Montrer que les points M, B et N sont alignés.

**Correction des exercices**

**Exercice 1**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **Si** l’angle BMC est droit | **Alors** le point M appartient au cercle de diamètre [BC] |

Compléter les propriétés suivantes :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***a.*** | **Si** l’angle ABC est droit | **Alors** le point B appartient au cercle de diamètre [AC]  |
| ***b.*** | **Si** l’angle EMF est droit | **Alors** le point M appartient au cercle de diamètre [EF]  |
| ***c.*** | **Si** l’angle SAT est droit | **Alors** le point A appartient au cercle de diamètre [ST]  |
| ***d.*** | **Si** l’angle IJK est droit | **Alors** le point J appartient au cercle de diamètre [IK]  |
| ***e.*** | **Si** l’angle ABM est droit | **Alors** le point B appartient au cercle de diamètre [AM]  |

## Exercice 2

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **Si** un point M appartient au cercle de diamètre [BC] | **Alors** l’angle BMC est droit |

Compléter les propriétés suivantes :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***a.*** | **Si** un point A appartient au cercle de diamètre [IJ] | **Alors** l’angle est droit |
| ***b.*** | **Si** un point C appartient au cercle de diamètre [AB] | **Alors** l’angle est droit |
| ***c.*** | **Si** un point O appartient au cercle de diamètre [KL] | **Alors** l’angle est droit |
| ***d.*** | **Si** un point E appartient au cercle de diamètre [DF] | **Alors** l’angle est droit |
| ***e.*** | **Si** un point T appartient au cercle de diamètre [RS] | **Alors** l’angle est droit |

# Exercice 3 Justifie les constructions.

1. Construis (sans utiliser l’équerre) un triangle IJK rectangle en J tel que: IK = 7 cm et IJ=3 cm .
2. Construis (sans utiliser l’équerre) un triangle LMN rectangle et isocèle en L tel que MN=8 cm.
3. Construis le centre du cercle ci-après

 **Solution**:

1. Analyse : - On sait que : le triangle IJK est rectangle en J. Or, « Si un triangle est rectangle, alors il est inscrit dans le cercle de diamètre l’hypoténuse de ce triangle ». Donc le triangle IJK est inscrit dans le cercle de diamètre [IK], c’est à dire le point J est sur le cercle de diamètre [IK].

 - IJ = 3 cm donc le point J est sur le cercle de centre I et de rayon 3 cm.

- Les deux cercles se coupent en deux points, le point J est l’un des deux.

Synthèse

 - Je trace le cercle de diamètre [IK] et le cercle de centre I et de rayon 3 cm. Ils se coupent en deux points, je choisis l’un des deux points comme point J. Est ce que le triangle obtenu est solution du problème ?

On a bien IK = 7 cm et IJ = 3 cm, mais est-t-il rectangle ?

- On sait que : J appartient au cercle de diamètre [IK].

 Or, « Si on joint un point d’un cercle aux deux extrémités d’un diamètre, alors on obtient un triangle rectangle ». Donc, le triangle IJK est bien rectangle en J donc il est bien solution du problème.

1. Analyse : - On sait que le triangle LMN est rectangle en L. Or, « Si un triangle est rectangle, alors il est inscrit dans le cercle de diamètre l’hypoténuse de ce triangle » . Donc le triangle LMN est inscrit dans le cercle de diamètre [MN], c’est à dire le point L est sur le cercle de diamètre [MN].

– Le triangle LMN est isocèle en L donc LM = LN et par la suite le point L est sur la médiatrice du segment [MN].

- La médiatrice de [MN] coupe le cercle en deux points, le point L est l’un des deux.

Synthèse

 - Je trace le cercle de diamètre [MN] et la médiatrice de [MN]. Ils se coupent en deux points, je choisis l’un des deux points comme point L. Est ce que le triangle obtenu est solution du problème ?

On a bien MN = 8 cm, mais est-t-il rectangle et isocèle?

- On sait que : L appartient au cercle de diamètre [MN]

Or, « Si l’on joint un point d’un cercle aux deux extrémités d’un diamètre, alors on obtient un triangle rectangle » Donc le triangle LMN est bien rectangle en L.

L appartient à la médiatrice du segment [MN] donc LM = LN. Donc le triangle obtenu est bien solution du problème.

1. Propriété : Si un triangle est rectangle, alors le centre du cercle circonscrit au triangle est le milieu de l’hypoténuse.

On applique cette propriété :

On place deux points A et B (suffisamment rapprochés pour que (AB) ne passe pas par le centre) sur le cercle et on trace la perpendiculaire à (AB) passant par A ; cette droite recoupe le cercle en un point C. Ainsi, on obtient un triangle rectangle en A inscrit dans le cercle. Le centre du cercle est donc le milieu de l’hypoténuse [BC]

 

### Exercice 4

EFG est un triangle tel que EF = 10 cm, EG = 6 cm et FG = 8 cm. Montrer que le cercle de diamètre [EF] passe par le point G.

**Solution :**

* Dans le triangle EFG,

 EF² = 10² donc EF² = 100, EG² + FG² = 6² + 8² = 36 + 64 = 100.

Donc EF² = EG² + FG², donc d’après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle EFG est rectangle en G.

* On sait que le triangle EFG est rectangle en G. Or, « Si un triangle est rectangle, alors il est inscrit dans le cercle de diamètre l’hypoténuse de ce triangle ». Donc, le triangle EFG est inscrit dans le cercle de diamètre [EF], d’où G appartient au cercle de diamètre [EF].

#  Exercice 5

 DEF est un triangle isocèle en D. E’ est le symétrique de E par rapport D.

 Démontrer que le triangle EFE’ est rectangle en F.

**Solution :**

 ****

* Le triangle DEF est isocèle en D donc DE = DF.
* E’ est le symétrique de E par rapport à D donc D est le milieu [EE’] , d’où DE = .
* DE = DF et DE = donc DF = .
* Dans le triangle EFE’, D est le milieu de [EE’] donc [DF] est la médiane issue de F.
* On sait que : dans le triangle EFE’, la médiane [DF] relatif au côté [EE’] a pour longueur la moitié de la longueur de [EE’]. Or, « Si, dans un triangle, la médiane relative à un côté mesure la moitié de la longueur de ce côté, alors ce triangle est rectangle ». Donc le triangle EE’F est rectangle en F.

#### Exercice 6

 (C) est un cercle de centre O. A et M sont deux points de (C) non diamétralement opposés. La perpendiculaire en M à (AM) recoupe (C) en B.

 ***a.*** Faire une figure.

 ***b.*** Démontrer que O est le milieu de [AB].

N est un autre point du cercle (C).

 ***c.*** Démontrer que ANB est un triangle rectangle

**Solution :**

 ****

 **a-**

* On sait que :Le triangle AMB est rectangle en M. Or, « Si un triangle est rectangle, alors il est inscrit dans le cercle de diamètre l’hypoténuse de ce triangle ». Donc, l’hypoténuse [AB] est un diamètre du cercle de centre O.
* [AB] est un diamètre du cercle de centre O donc O est le milieu de [AB].
	1. On sait que : N appartient au cercle de diamètre [AB].

Or, « Si l’on joint un point d’un cercle aux deux extrémités d’un diamètre, alors on obtient un triangle rectangle ». Donc le triangle ANB est rectangle en N.

# Exercice 7

Soit A, B, C et D quatre points distincts du plan. Sachant que les triangles ABC et ABD sont rectangles respectivement en C et D, montrer que les quatre points sont cocycliques (situés sur un même cercle).

**Solution :**

 ****

* + On sait que le triangle ABC est rectangle en C.
	+ Or, « Si un triangle est rectangle, alors il est inscrit dans le cercle de diamètre l’hypoténuse de ce triangle » . Donc le triangle ABC est inscrit dans le cercle de diamètre [AB]. Donc le point C est sur le cercle de diamètre [AB].
	+ On sait que : le triangle ABD est rectangle en D.
	+ Or,  « Si un triangle est rectangle, alors il est inscrit dans le cercle de diamètre l’hypoténuse de ce triangle » . Donc, le triangle ABD est inscrit dans le cercle de diamètre [AB]. Donc le point D est sur le cercle de diamètre [AB].
	+ Les points C et D sont sur le cercle de diamètre [AB] donc les quatre points A, B, C et D sont cocycliques.

# Exercice 8

Soit *C et C ‘* deux cercles de centres respectifs O et O’, sécants (qui se coupent en deux points) en A et B.Les deux cercles n’ont pas forcément les mêmes rayons. La droite (AO) recoupe le cercle *C en* M et La droite (AO’) recoupe le cercle *C’* en N. Montrer que les points M, B et N sont alignés.

**Solution :**

 

* On sait que : B appartient au cercle de diamètre [AM].

Or, « Si l’on joint un point d’un cercle aux deux extrémités d’un diamètre, alors on obtient un triangle rectangle ». Donc, le triangle AMB est rectangle en B donc = 90°.

* On sait que : B appartient au cercle de diamètre [AN].

Or, « Si l’on joint un point d’un cercle aux deux extrémités d’un diamètre, alors on obtient un triangle rectangle ». Donc, le triangle ANB est rectangle en B donc = 90°.

* *** =***  +  = 90° + 90° = 180° donc les points M, B et N sont alignés.